ние между соответствующими прямыми и угол между ними.

Можно доказать, что имеет место

Т е о р е м а 10. Для пары Т конгруэнций с нормальными дополнительными конгруэнциями два из трех нижеприведенных условий приводит к третьему : а/ постоянно произведение абсцисс соответствующих фокусов; б/ постоянно расстояние между соответствующими прямыми; в/ постоянен угол между соответствующими прямыми. Произвол существования таких пар конгруэнций - две функции одного аргумента.

Библиографический список

1. Р е д о з у б о в а О.С. Основы метрической теории пар Т конгруэнций / МГПИ им. В.И.Ленина. М., 1980. Деп. в ВИНИТИ. №2993 - 80 Деп.

УДК 514.76

О ГЕОМЕТРИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ

$$u_{tt} = f\,(t, x^i, u, u_t, u_j, u_{tk}, u_{kl})$$

А.К.Р ы б н и к о в

(Московский государственный университет)

Цель настоящей работы - изучение геометрии решений дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f\left(t, x^i, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x^j}, \frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x^k}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^k\,\partial x^l}\right). \qquad (1a)$$

В работе построен фундаментальный объект, определяющий геометрию, индуцируемую на произвольном решении уравнения (1a). Построена (при дополнительном условии невырожденности) аффинная связность без кручения, индуцируемая на решении.

1. Геометрия уравнения (1a) понимается как совокупность инвариантов относительно преобразований

$$\tilde t = \tilde t\,(t), \quad \tilde x^i = \tilde x^i\,(t, x^1, \dots, x^n), \quad \tilde u = \tilde u\,(t, x^1, \dots, x^n, u)$$

и соответствующих преобразований частных производных первого и второго порядков (такие преобразования не изменяют вид уравнения (1a)). Переменные $t, x^1, \dots, x^n, u$ рассматриваются как адаптированные локальные координаты $(n+2)$ -мерного расслоения общего типа E с расслоенной $(n+1)$ -мерной базой M, локальными координатами которой являются переменные $t, x^1, \dots, x^n$.

Уравнение (1a) может быть записано в более общем виде

$$\lambda_{00} = f\,(t, x^1, \dots, x^n, u, \lambda_0, \lambda_i, \lambda_{0k}, \lambda_{kl}), \qquad (1)$$

где

$$t, x^i, u, \lambda_{\hat i}, \lambda_{\hat k\hat l} \quad (\lambda_{\hat k\hat l} = \lambda_{\hat l\hat k}\,;\ \hat i, \hat j, \dots = 0, 1, \dots, n)$$

- адаптированные локальные координаты в многообразии голономных 2-струй [1] локальных сечений расслоения E. При соответствующей специализации выбора локальных координат имеют место равенства

$$\lambda_{\hat i} = \frac{\partial u}{\partial x^{\hat i}}, \quad \lambda_{\hat k\hat l} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^{\hat k}\,\partial x^{\hat l}}, \quad x^0 = t.$$

Пусть

$$\omega^{\hat i};\ \omega^{n+1};\ \omega^0_0;\ \omega^i_j;\ \omega^{n+1}_{n+1};\ \omega^{n+1}_{\hat j};\ \omega^0_{00};\ \omega^i_{\hat j\hat k};\ \omega^{n+1}_{n+1,n+1};\ \omega^{n+1}_{\hat j,n+1};\ \omega^{n+1}_{\hat j\hat k};\ \dots \qquad (2)$$

- последовательность (симметричных по нижним индексам) структурных форм расслоений голономных реперов многообразия E. Эти формы могут быть выбраны таким образом, чтобы на решении Σ дифференциального уравнения (1) имели место равенства

$$\omega^{n+1} = 0, \quad \omega^{n+1}_{\hat j} = 0, \quad \omega^{n+1}_{\hat j\hat k} = 0, \dots \qquad (3)$$

Структурные уравнения, которым удовлетворяют формы (2), включают уравнения

$$\begin{cases} d\omega^0 = \omega^0 \wedge \omega^0_0, \quad d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + \omega^0 \wedge \omega^i_0, \\ d\omega^{n+1} = \omega^{n+1} \wedge \omega^{n+1}_{n+1} + \omega^j \wedge \omega^{n+1}_j + \omega^0 \wedge \omega^{n+1}_0 \end{cases} \qquad (4)$$

и, кроме того, уравнения, возникающие в процессе правильного продолжения [2] уравнений (4).

Дифференцируя уравнение (1) внешним образом, мы получим соотношение, которое можно записать в виде

$$\omega^{n+1}_{00} = F_0\omega^0 + F_j\omega^j + F\omega^{n+1} + F^0\omega^{n+1}_0 + F^i\omega^{n+1}_i + F^{0j}\omega^{n+1}_{0j} + F^{jk}\omega^{n+1}_{jk}. \qquad (5)$$

На решении Σ имеем $F_{\hat i} = 0$, что следует из (5) в силу (3).

Геометрия, индуцируемая на Σ, определяется фундаментальным объектом с компонентами $F^{jk}, F^{oj}, F^{o}, F^{i}, F$. Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти компоненты, мы получим в результате дифференциального продолжения уравнения (5) (с учетом (3) и того, что $F_{\hat{\tau}}=0$ на Σ). Рассматривая эти уравнения, можно заметить, что фундаментальный объект обладает подобъектом с компонентами $F^{\hat{\tau}j}$.

Положим

$$f^{jk} = F^{jk} + \frac{1}{4} F^{oj} F^{ok}, \quad f^{i} = \frac{1}{2} F^{oi}.$$

Из рассмотрения дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют f^{jk}, заключаем, что f^{jk} являются компонентами поля псевдотензора типа (2,0), определенного на n-мерных слоях $(n+1)$-мерной базы M.

2. Будем предполагать, что псевдотензор f удовлетворяет условию невырожденности

$$\det \| f^{jk} \| \neq 0. \tag{6}$$

В этом случае можно ввести объект f_{jk}, обратный по отношению к f^{jk}. Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют f_{jk}, f^{i}, имеют вид

$$df_{jk} - f_{mk}\omega_j^m - f_{jm}\omega_k^m + 2f_{jk}\omega_o^o = f_{jk,\hat{\ell}}\,\omega^{\hat{\ell}},$$
$$df^{i} + f^{m}\omega_m^i - f^{i}\omega_o^o - \omega_o^i = f^{i}_{\hat{\ell}}\,\omega^{\hat{\ell}}.$$

В процессе продолжения мы получим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют $f_{jk,\hat{\ell}}$; $f^{i}_{\hat{\ell}}$.

На решении Σ можно построить объект аффинной связности без кручения, охваченный фундаментальным объектом. Компоненты этого объекта связности $\Gamma^{i}_{j\hat{k}}, \Gamma^{\hat{\tau}}_{oo}$ определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{2} f^{im}(f_{m(j,k)} - f_{jk,m}), \quad \Gamma^{i}_{jo} = f^{i}_{j} + \Gamma^{i}_{jm} f^{m}, \\ \Gamma^{o}_{oo} = \frac{1}{2n} f^{jk}(f_{jk,m} f^{m} - f_{jk,o}) + \frac{1}{n} f^{m}_{m}, \\ \Gamma^{i}_{oo} = f^{i}_{o} + f^{m}\Gamma^{i}_{mo} - f^{i}\Gamma^{o}_{oo}. \end{cases} \tag{7}$$

Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\Gamma^{i}_{jk} + \Gamma^{m}_{jk}\omega^{i}_{m} - \Gamma^{i}_{mk}\omega^{m}_{j} - \Gamma^{i}_{jm}\omega^{m}_{k} - \omega^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk,\hat{\ell}}\,\omega^{\hat{\ell}},$$
$$d\Gamma^{i}_{jo} + \Gamma^{m}_{jo}\omega^{i}_{m} - \Gamma^{i}_{mo}\omega^{m}_{j} - \Gamma^{i}_{j\hat{m}}\omega^{\hat{m}}_{o} - \omega^{i}_{jo} = \Gamma^{i}_{jo,\hat{\ell}}\,\omega^{\hat{\ell}},$$
$$d\Gamma^{o}_{oo} - \Gamma^{o}_{oo}\omega^{o}_{o} - \omega^{o}_{oo} = \Gamma^{o}_{oo,\hat{\ell}}\,\omega^{\hat{\ell}},$$
$$d\Gamma^{i}_{oo} + \Gamma^{\hat{m}}_{oo}\omega^{i}_{\hat{m}} - 2\Gamma^{i}_{o\hat{m}}\omega^{\hat{m}}_{o} - \omega^{i}_{oo} = \Gamma^{i}_{oo,\hat{\ell}}\,\omega^{\hat{\ell}}.$$

Формы связности

$$\omega^{o},\ \omega^{i},\ \tilde{\omega}^{o}_{o} = \omega^{o}_{o} + \Gamma^{o}_{oo}\omega^{o},\ \tilde{\omega}^{i}_{j} = \omega^{i}_{j} + \Gamma^{i}_{j\hat{k}}\omega^{\hat{k}},\ \tilde{\omega}^{i}_{o} = \omega^{i}_{o} + \Gamma^{i}_{o\hat{k}}\omega^{\hat{k}}$$

удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^{o} = \omega^{o}\wedge\tilde{\omega}^{o}_{o},\ d\omega^{i} = \omega^{j}\wedge\tilde{\omega}^{i}_{j} + \omega^{o}\wedge\tilde{\omega}^{i}_{o},\ d\tilde{\omega}^{o}_{o} = 2R^{o}_{ook}\,\omega^{o}\wedge\omega^{k},$$
$$d\tilde{\omega}^{i}_{j} = \tilde{\omega}^{m}_{j}\wedge\tilde{\omega}^{i}_{m} + R^{i}_{jk\ell}\,\omega^{k}\wedge\omega^{\ell} + 2R^{i}_{jok}\,\omega^{o}\wedge\omega^{k},$$
$$d\tilde{\omega}^{i}_{o} = \tilde{\omega}^{o}_{o}\wedge\tilde{\omega}^{i}_{o} + \tilde{\omega}^{m}_{o}\wedge\tilde{\omega}^{i}_{m} + R^{i}_{ok\ell}\,\omega^{k}\wedge\omega^{\ell} + 2R^{i}_{ook}\,\omega^{o}\wedge\omega^{k},$$

где

$$R^{o}_{ook} = -\frac{1}{2}\Gamma^{o}_{oo,k},\ R^{i}_{jk\ell} = -\frac{1}{2}\left(\Gamma^{i}_{j[k,\ell]} + \Gamma^{m}_{j[k}\Gamma^{i}_{\ell]m}\right),$$
$$R^{i}_{jok} = -\frac{1}{2}\left(\Gamma^{i}_{j[o,k]} + \Gamma^{m}_{j[o}\Gamma^{i}_{k]m}\right),\ R^{i}_{ok\ell} = -\frac{1}{2}\left(\Gamma^{i}_{o[k,\ell]} + \Gamma^{m}_{o[k}\Gamma^{i}_{\ell]m}\right),$$
$$R^{i}_{ook} = -\frac{1}{2}\left(\Gamma^{i}_{o[o,k]} + \Gamma^{m}_{o[o}\Gamma^{i}_{k]m} + \Gamma^{o}_{oo}\Gamma^{i}_{ok}\right).$$

3. Кроме объекта связности (7) на решении Σ можно построить охваченный фундаментальным объектом относительный инвариант. Сделать это можно следующим образом. Рассмотрим величины

$$\varphi_j = \frac{1}{2} f_{jm}\Phi^{m}, \qquad \varphi_o = f^{m}\varphi_m - \frac{1}{2}\Phi_o,$$

где

$$\Phi_o = F^{o} - \Gamma^{o}_{oo},\ \Phi^{i} = F^{i} + f^{i}\Phi_o + 2f^{m}\Gamma^{i}_{mo} - \Gamma^{i}_{uv} f^{u} f^{v} + f^{uv}\Gamma^{i}_{uv} - \Gamma^{i}_{oo}.$$

Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют φ_j и φ_o, имеют следующий вид:

$$d\varphi_j - \varphi_m\omega^{m}_{j} - \omega^{n+1}_{n+1,j} = \varphi_{j,\hat{k}}\,\omega^{\hat{k}},\ d\varphi_o - \varphi_{\hat{m}}\omega^{\hat{m}}_{o} - \omega^{n+1}_{n+1,o} = \varphi_{o,\hat{k}}\,\omega^{\hat{k}}.$$

Теперь можно убедиться, что относительным инвариантом является величина

$$\begin{aligned} \varphi = F - (f^{uv} - f^{u}f^{v})(\varphi_u\varphi_v - \varphi_m\Gamma^{m}_{uv} + \varphi_{uv}) + 2\varphi_m f^{t}\Gamma^{m}_{to} - \\ - \varphi_o\Gamma^{o}_{oo} + (\varphi_o)^2 - 2\varphi_o f^{m}\varphi_m - \varphi_m\Gamma^{m}_{oo} - \varphi_{o,o} - 2f^{m}\varphi_{om}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\varphi_{jk} = \frac{1}{2}\varphi_{(j,k)}, \qquad \varphi_{oj} = \frac{1}{2}(\varphi_{o,j} + \varphi_{j,o}).$$

Действительно, в случае, когда точка многообразия Σ фиксирована, φ удовлетворяет дифференциальному уравнению $d\varphi = 2\varphi\,\tilde{\omega}^{o}_{o}$, где $\tilde{\omega}^{o}_{o} = \omega^{o}_{o}\big|_{\omega^{\hat{\tau}}=0}$. Итак, доказана

Т е о р е м а. Геометрия дифференциального уравнения второго порядка с частными производными (I), удовлетворяющего условию невырожденности (6), индуцирует на каждом решении уравнения аффинную связность без кручения, компоненты которой вычисляются по формулам (7), и относительный инвариант (8).

П р и м е р. Рассмотрим в качестве примера обобщенное уравнение $\sin$-Гордона $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}-\sin u$. Оно имеет, в частности, решение:

$$u=4\,\mathrm{arctg}\, e^{\sqrt{2}(x+y)-t} \qquad (9)$$

Вычисляя указанным выше образом основные объекты в голономном репере, мы устанавливаем, что индуцируемая на решении (9) связность – плоская.

Библиографический список

I. В а с и л ь е в А.М. Теория дифференциально-геометрических структур. М.: Изд-во МГУ, 1987. 190 с.

2. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т.I. С.139-189.

УДК 514.75

О ФОКАЛЬНОСТИ ПОЛЯ ОСОБЫХ НОРМАЛЕЙ ПОВЕРХНОСТИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ГИПЕРСФЕРЕ

Е.В.С и л а е в

(Московский государственный педагогический институт)

Пусть поверхность V_p лежит на гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ с центром в точке O и радиусом r в евклидовом пространстве E_n. Присоединим к поверхности V_p подвижный репер

$$R=\{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\} \qquad (i,j=\overline{1,p}\ ;\ \alpha,\beta=\overline{p+1,n})$$

так, чтобы векторы $\vec{e}_i$ лежали в касательном пространстве T_x к поверхности V_p в точке x, а векторы $\vec{e}_\alpha$ составляли ортонормированный базис ортогонального дополнения N_x к пространству T_x в точке x. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\vec{Ox}=\omega^i\vec{e}_i,\ d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha,\ d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta. \qquad (1)$$

В работе [3] было доказано, что если поверхность V_p лежит на гиперсфере евклидова пространства, то в плоскости главной нормали $N_q(x)$ не существует других нормалей, кроме нормали $O'x$, относительно которых поверхность V_p являлась бы омбилической (O' – ортогональная проекция точки O на плоскость $N_q(x)$). Нормаль $O'x$ называется особой нормалью [1]. Направим вектор $\vec{e}_{p+1}$ вдоль вектора $\vec{O'x}$, тогда

$$\vec{O'x}=x^{p+1}\vec{e}_{p+1} \quad (x^{p+1}\neq 0).$$

Потребуем, чтобы выполнялись условия:

$$\vec{e}_{\hat{\alpha}}\parallel N_q(x)\ (\hat{\alpha}=\overline{p+2,p+q}),\ \vec{e}_\sigma\perp N_q(x)\quad (\sigma,\delta=\overline{p+q+1,n}).$$

Тогда равенство $\vec{Ox}=\vec{OO'}+\vec{O'x}$ можно записать следующим образом:

$$\vec{Ox}=x^\sigma\vec{e}_\sigma+x^{p+1}\vec{e}_{p+1}, \qquad (2)$$

где $x^\sigma\vec{e}_\sigma=\vec{OO'}$.

При смещении точки x вдоль поверхности V_p имеем $\omega^\alpha=0$. Дифференцируя это уравнение внешним образом и применяя лемму Картана, получим

$$\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j,\quad b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha.$$

Так как векторы $\vec{e}_{p+1},\vec{e}_{\hat{\alpha}}$ параллельны плоскости $N_q(x)$, то, как известно [2], $b_{ij}^\sigma=0$, откуда следует, что

$$\omega_i^\sigma=0 \qquad (3)$$

Дифференцируя равенства $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_\sigma=0$, получим, что $\omega_\sigma^j\gamma_{ji}+\omega_i^\sigma=0$, где $\gamma_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$. Откуда в силу равенств (3) получим, что

$$\omega_\sigma^j=0. \qquad (4)$$

Дифференцируя равенство (2) с учетом формул (I), имеем:

$$\omega^i=x^{p+1}\omega_{p+1}^i, \qquad (5а)$$

$$dx^{p+1}+x^\delta\omega_\delta^{p+1}=0, \qquad (5б)$$

$$x^{p+1}\omega_{p+1}^{\hat{\alpha}}+x^\delta\omega_\delta^{\hat{\alpha}}=0, \qquad (5в)$$

$$x^{p+1}\omega_{p+1}^\sigma+dx^\sigma+x^\delta\omega_\delta^\sigma=0. \qquad (5г)$$

Рассмотрим точку F : $\vec{OF}=\vec{Ox}+\rho\vec{e}_{p+1}$ на особой нормали $O'x$. Тогда

$$d\vec{OF}=(\omega^i+\rho\,\omega_{p+1}^i)\vec{e}_i+d\rho\,\vec{e}_{p+1}+\rho\,\omega_{p+1}^{\hat{\alpha}}\vec{e}_{\hat{\alpha}}+\rho\,\omega_{p+1}^\sigma\vec{e}_\sigma.$$

Точка F является фокусом нормальной плоскости $N_{n-p}(x)$ к поверх-